

科	学	技	術	計	算	分	科	会		選	出
---	---	---	---	---	---	---	---	---	--	---	---

科学技術計算分科会 2016 年度会合より

スーパーコンピューターを用いた

太陽のシミュレーション

堀田 英之  
(千葉大学)

## スーパーコンピューターを用いた 太陽のシミュレーション

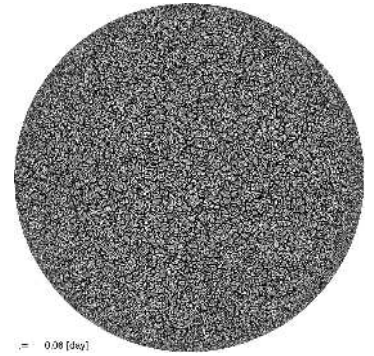
千葉大学 堀田英之

共同研究者：  
Matthias Rempel [HAO/NCAR]  
横山央明 [東京大学]

## 自己紹介

名前：堀田英之  
所属：千葉大学  
性別：男  
年齢：31歳  
身分：特任助教(テニュアトラック)  
単位系：cgs gauss

経歴  
2005-2009年 東京大学  
2009-2014年 東京大学大学院  
横山央明准教授指導  
2014-2015年 HAO/NCAR  
海外学振  
2015年- 現職



0.08 [deg]

## 目次

- ・黒点数11年周期の問題
- ・太陽ダイナモ計算の現状と問題
- ・数値計算法
- ・結果
- ・これからの研究課題とコード開発の展望

## 太陽黒点



太陽黒点：  
太陽表面に見える  
強磁場・低温度の領域  
普通の領域：10 G・6000 K  
黒点：3000 G・4000 K

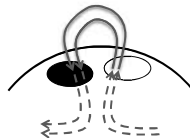
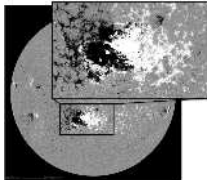
黒点領域では放射層からの熱対流による熱輸送を抑制することで低温になっている。

## 太陽黒点とその周期

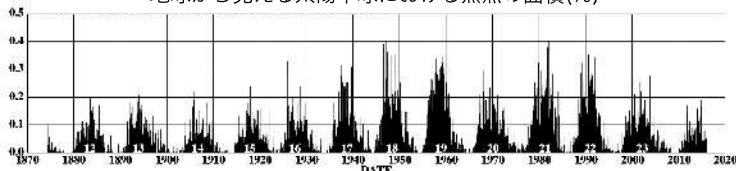
(NASA/JAXA/岡本文典)



(SDO/HMI)



地球から見える太陽半球における黒点の面積(%)

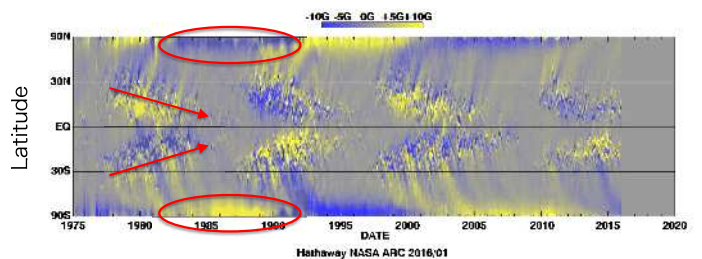


<http://solbase.nas.nasa.gov/>

HATHAWAY NASA ARC 2014-04

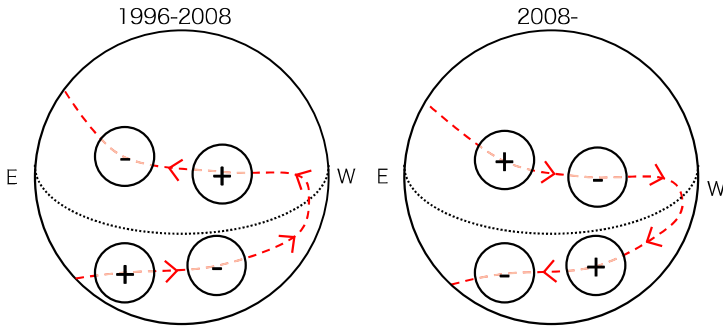
## 蝶形図

11年周期は規則正しいルールを持っている



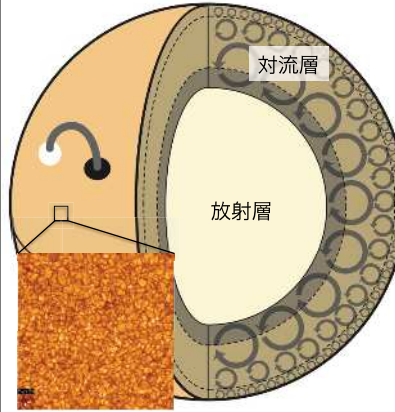
- ✓ 太陽黒点の出現緯度は周期の間に赤道に移動する。
- ✓ 全球双極子磁場は11年に一度反転する。

## ヘールニコルソンの法則



90%以上の黒点ペアが従う極性のルール。  
この法則は太陽内部の大規模磁場の存在を示唆している。

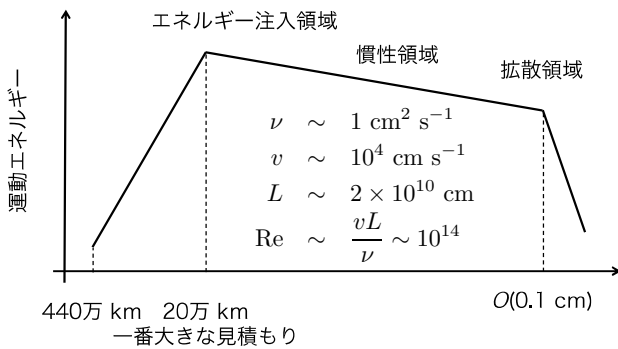
## 太陽ダイナモのざっくりとした考え方



1. 対流層の底で温め、表面で冷やすことで熱対流が発生
2. 乱流的な熱対流が、回転の影響を受け、非等方的になる
3. 非等方な乱流が角運動量を運び、差動回転や子午面還流を作る。
4. 差動回転、子午面還流、非等方な乱流のコンビネーションにより大規模な磁場をつくる。

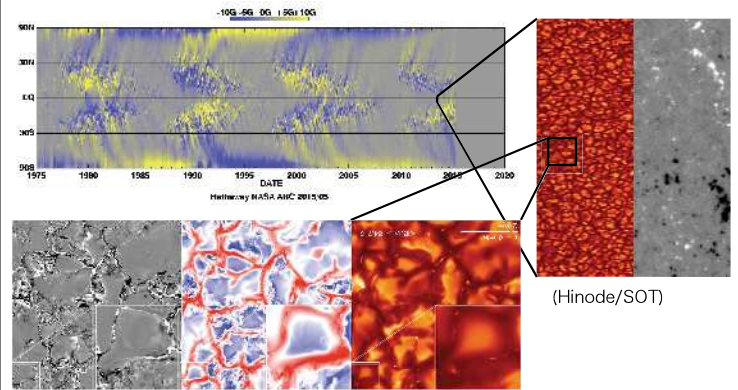
熱対流をよく理解することが重要

## 解かなければいけない乱流



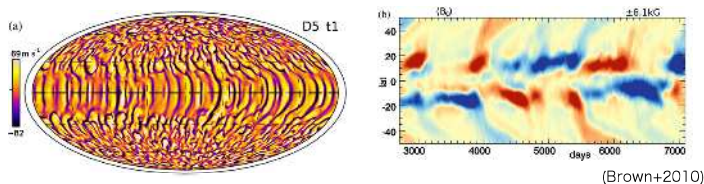
慣性領域をより多く分解したいが、太陽が大きくてエネルギー注入領域を分解するだけで精一杯。

## スケール間ギャップ



(Rempel, 2014, Numerical Calculation)

## これまでのダイナモ計算

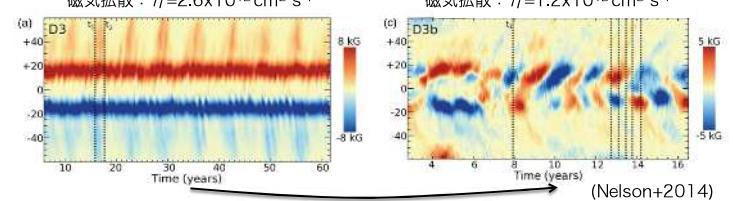


最近の3次元計算には、**コヒーレントな磁場**やその**周期変化**が再現できようになっている(Ghizaru+2010, Brown+2010, Racine+2011, Käpylä+2012, Masada+2013, Fan+2014, Warnecke+2015, Karak+2015)。

主な生成機構は  $\alpha$  効果(乱流誘導起電力)と  $\Omega$  効果(差動回転によるひきのび)である。

## 高解像度ダイナモ計算で弱る大規模磁場

一方で、(発表者が確認している限り)全てのグローバルダイナモ計算はとも低い解像度でおこなわれている。解像度をあげる、すなわち粘性・磁気拡散を下げると、**小スケール乱流によって大局的磁場は弱くなる**。



ローカルダイナモでは、引き延ばしが最も重要なプロセスであり、**最も小さなスケールが、最も大きな線形成長率を持つ**。とても小さな粘性 ( $O(1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})$ )・磁気拡散 ( $\sim O(10^4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1})$ )を持つ実際の太陽はどのように大規模磁場を作っているかは謎。

## 理想的乱流シミュレーションからの示唆

高磁気レイノルズ数( $R_m \sim 2500$ )での2次元運動学的ダイナモ  
(Tobias+2013, Cattaneo+2014, Nature)

exponentialな成長成分を規格化した平均磁場

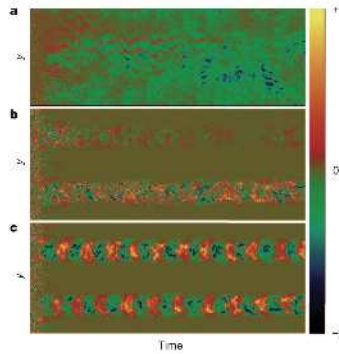
重要な提言は、大スケールダイナモ達成のためには、**小スケールダイナモを抑制**することが必要であるということ

この論文では強いシアを加えて小スケールダイナモを殺している。

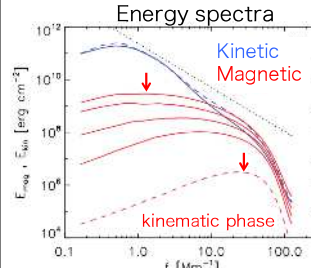
helical  
no shear

non-helical  
with shear

helical  
with shear



## 小スケールダイナモ的非線形効果



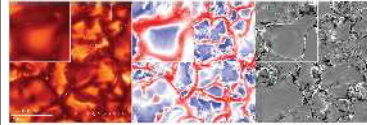
小スケールダイナモ

$$\frac{D \mathbf{B}}{Dt} = \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}$$

大スケールダイナモ

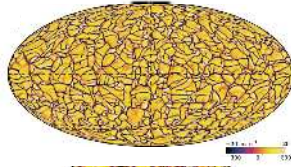
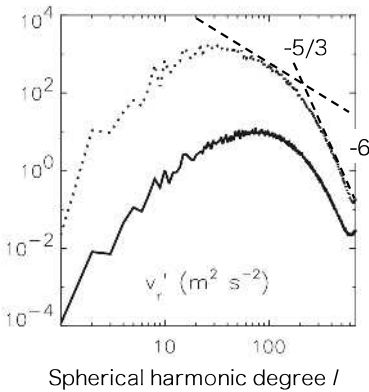
$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times ((\mathbf{v}) \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \nabla \times ((\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'))$$

大規模流れや乱流の非等方性がなくても、乱流場そのものによって小スケールの磁場をつくることができ、解像度が確保されれば小スケールで磁場エネルギーが運動エネルギーを上回り、小スケール流れ場を抑制。慣性領域を一桁以上分解することが必須の様子。



Rempel, 2014

## 全球大規模計算の解像度



これまでの世界最高の解像度は Miesch+2008の計算(磁場なし)。

慣性領域のようなものはせいぜいエネルギー注入領域の半分くらいまでしか解けていない。磁場があったとしても小スケールダイナモは不活発。

当然他の計算はもっと解けてない

## おおざっぱな動機

大きな問題は、**解像度をあげればあげるほど大規模磁場は弱くなっていき現実からずれていく**こと。

太陽ダイナモ計算の暗黙の了解は**解像度をあげすぎない**こと。

当然、これでは現実の太陽を理解できなかったことになるので、なんとか打開策を探る。

現在のところ最高解像度の計算では乱流の慣性領域はほとんど解けておらず、**小スケールのダイナモ効果が効率的ではない**。

太陽全球を扱っても、**小スケールのダイナモ効果が効率的になるような高解像度を達成すること**を目標とする。

## Anelastic近似

太陽対流層内部では音速がとても速いので、陽解法で解くとCFL条件がきつい

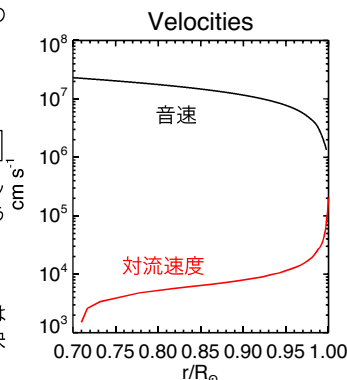
$$\Delta t < \frac{\Delta x}{c_s + v_c + c_a}$$

$c_s$ : 音速  $v_c$ : 熱対流速度,  $c_a$ : アルフベン速度

そこで採用されるのが、**アナラストイック近似**。そこでは連続の式を以下のように変形する。

$$0 = \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) \leftrightarrow 0 = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

音波の速度は無限大になり音波の伝搬は解かれない。CFLは熱対流速度だけで決まる。



## Anelastic近似の問題

**音速無限大の仮定**: 音速が無限大で情報を運ぶので毎時間ステップすべてのCPUの情報をすべてのCPUが必要とする。通信負荷大

**高解像度化の限界(ASH限定)**: 球面調和関数を用いたスペクトル法を用いた手法が一般的であるが、フーリエ変換( $O(N \log N)$ )と違いルジャンドル陪関数を用いた展開には高速なものがないので、負荷は $O(N^2)$ となる。

また、MHDでよく使われるslope-limiter的な手法が使いにくいので、実質的に低解像度になる。(詳細は後述)

**近似の限界**: 太陽表面( $>0.99R_{\text{sun}}$ )では、音速と熱対流速度が同程度になるので、Anelastic近似の仮定自体が破綻。表面が取り扱えない。

## 音速抑制法(RSST)

密度の擾乱  $\rho_1$  を  $\xi^2$  倍する ( $\rho_0$  は時間変化しない背景密度場)

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \longrightarrow \rho = \rho_0 + \xi^2 \rho_1$$

この操作によって**実効的な音速は  $1/\xi$**  になる。連続の式を以下のように変形したことに同等になる。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{1}{\xi^2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

この手法ならば、**局所通信のみが必要**となる。この方法の妥当性は我々の過去研究で確認されている (Hotta+2012)。抑制された音速で測ったマッハ数が0.7よりも小さかったら熱対流に対して影響がないことが確かめられた。

非一様などを使ってもよく。対流層の底で大きな  $\xi$ 、太陽表面近くでは  $\xi=1$  を用いることで物理を失うことなく太陽表面まで解ける。

## 解く方程式

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla p_1 - \rho_1 g \mathbf{e}_r + 2\rho \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_0 + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

$$\rho T \frac{\partial s_1}{\partial t} = -\rho T (\mathbf{v} \cdot \nabla) s + \Gamma$$

$$p_1 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \rho_1 + \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho s_1$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\rho = \rho_0 + \xi^2 \rho_1$$

球対称な静水圧平衡モデル  $\rho_0, P_0, T_0$  を用いる。

球対称場は、**太陽標準モデル (Model S)** を使う。そこからの擾乱場のみを解く。対流層の中だと、

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \sim \frac{p_1}{p_0} \sim \frac{T_1}{T_0} \sim \frac{v_c^2}{c_s^2} \sim 10^{-6}$$

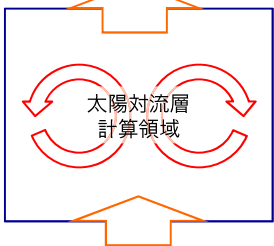
状態方程式は、電離の効果を入れるために背景場より計算しておいた値を使う(線形近似)。エントロピーの方程式を解く

Model Sは以下からダウンロードできる。

[http://astro.phys.au.dk/~jcd/solar\\_models/](http://astro.phys.au.dk/~jcd/solar_models/)

## 解く状況

恣意的に与える  
エネルギーフラックス  
総量は太陽放射



太陽標準モデルで与えられる  
エネルギーフラックス

現状では、計算資源の制約から**太陽表面まで一貫して解くことは難しい**のである程度のところ人工的な上部境界条件を置いて、そこを冷やして熱対流を駆動している。基本的には、太陽放射が注入されて、太陽放射が抜かれるシステム。

	対流層の底	太陽表面
空間スケール	60,000 km	300 km
速度	100 m/s	1,000 m/s
時間スケール	1週間	5分

空間スケールは密度スケール長  
 $F_e = c_p \rho \langle v_r T' \rangle$

## 数値アルゴリズム

時間積分: **メモリ節約の4段Runge-Kutta**

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{R}(\mathbf{U})$$

$$\mathbf{U}_{1/4} = \mathbf{U}_0 + \frac{\Delta t}{4} \mathbf{R}(\mathbf{U}_0) \longrightarrow \mathbf{U}_{1/3} = \mathbf{U}_0 + \frac{\Delta t}{3} \mathbf{R}(\mathbf{U}_{1/4}) \longrightarrow \mathbf{U}_{1/2} = \mathbf{U}_0 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{R}(\mathbf{U}_{1/3}) \longrightarrow \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_0 + \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{U}_{1/2})$$

空間微分: **4次中央差分**

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{12\Delta x} (-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2})$$

この手法だとクーラン数が

$$\Delta t = C_{CFL} \frac{\Delta x}{c_s + v_c + c_A}, \quad C_{CFL} < 2$$

お得。

## 人工粘性

4次精度の中央差分では、ほとんど数値粘性が入らないために乱流問題を解くと不安定化(カスケードの先で散逸させる機構は必要)

そこで人工粘性を採用。風上法で1次精度と2次精度を切り替えるのと原理的には同じ (Rempel+2009, Rempel, 2014参照)

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} = -\frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{\Delta x} \quad F_{i+1/2} = -\frac{1}{2} c_{i+1} \Delta x \Phi(u_r - u_i, u_{i+1} - u_i)(u_r - u_i)$$

$$u_l = u_i + 0.5\Delta u_i$$

$$u_r = u_{i+1} - 0.5\Delta u_{i+1}$$

$$\Delta u_i = \min\left[ \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2}, \epsilon(u_{i+1} - u_i), \epsilon(u_i - u_{i-1}) \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi = \max \left[ 0, 1 + h \left( \frac{u_r - u_l}{u_{i+1} - u_i} - 1 \right) \right] & (u_r - u_l) \cdot (u_{i+1} - u_i) > 0 \\ \Phi = 0 & (u_r - u_l) \cdot (u_{i+1} - u_i) \leq 0 \end{array} \right.$$

## 人工粘性の理念 (1/2)

$$F_{i+1/2} = -\frac{1}{2} c_{i+1} \Delta x \Phi(u_r - u_l, u_{i+1} - u_i)(u_r - u_l)$$

Lax-Friedrich法(空間時間1次精度)  
を基本に改訂

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} Q_i^{n+1} &= \frac{Q_{i-1}^n + Q_{i+1}^n}{2} + \Delta t \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} \\ &= Q_i^n + \frac{Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n}{2} + \Delta t \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} \\ &= Q_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n}{(\Delta x)^2} \Delta t + \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x} \end{aligned}$$

粘性係数  $(\Delta x)^2 / (2\Delta t)$  の粘性をかけているのと同じ。CFLの限界までかける

$$\Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{2\nu} \rightarrow \nu < \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$$

## 人工粘性の理念 (2/2)

$$F_{i+1/2} = -\frac{1}{2}c_{i+1}\Delta x\Phi(u_r - u_l, u_{i+1} - u_i)(u_r - u_l)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c} \rightarrow \nu < \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} = \frac{1}{2}c\Delta x$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n + \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{Q_{i-1}^n - 2Q_i^n + Q_{i+1}^n}{\Delta x} \Delta t + \frac{F_{i+1} - F_{i-1}}{2\Delta x}$$

↑ 時間4次精度に変える      ↑ ローカルに粘性係数を決めて minmod関数で最適化      ↑ 空間4次精度に変える

4次精度を用いて、最大でLax-Friedrichの粘性フラックスを用いることで、安定で高解像度なスキームを達成する。

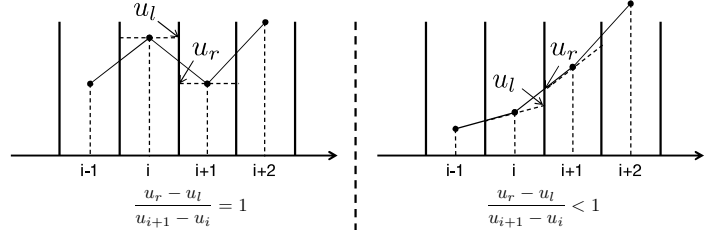
## 粘性フラックスの最適化 (1/2)

$$u_l = u_i + 0.5\Delta u_i \quad F_{i+1/2} = -\frac{1}{2}c_{i+1}\Delta x\Phi(u_r - u_l, u_{i+1} - u_i)(u_r - u_l)$$

$$u_r = u_{i+1} - 0.5\Delta u_{i+1}$$

$$\Delta u_i = \text{minmod} \left[ \frac{(u_{i+1} - u_{i-1})}{2}, \epsilon(u_{i+1} - u_i), \epsilon(u_i - u_{i-1}) \right]$$

Generalized minmod limiter: 英語wikipedia flux-limiter参照



この状況のときは、Lax-Friedrichの粘性を最大までかけて安定化      この状況のときは、非常に小さい粘性の粘性を最大までかけて安定化      粘性がまったくかからないこともある

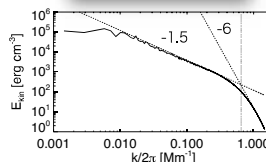
## 粘性フラックスの最適化 (2/2)

$$F_{i+1/2} = -\frac{1}{2}c_{i+1}\Delta x\Phi(u_r - u_l, u_{i+1} - u_i)(u_r - u_l)$$

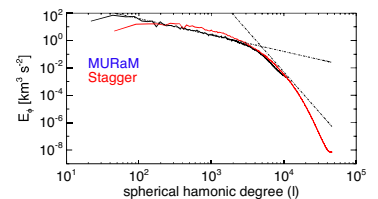
$$\begin{cases} \Phi = \max \left[ 0, 1 + h \left( \frac{u_r - u_l}{u_{i+1} - u_i} - 1 \right) \right] & (u_r - u_l) \cdot (u_{i+1} - u_i) > 0 \\ \Phi = 0 & (u_r - u_l) \cdot (u_{i+1} - u_i) \leq 0 \end{cases}$$

$h > 1$ のとき、非常になめらかな構造に対しては、人工粘性を一切かけない。ダイナモ計算では $h=2$ を使っている。最大値はなく、磁気プラントル数がとても小さい計算では、 $h=200$ 程度を用いても問題はない。

## 人工粘性の成果

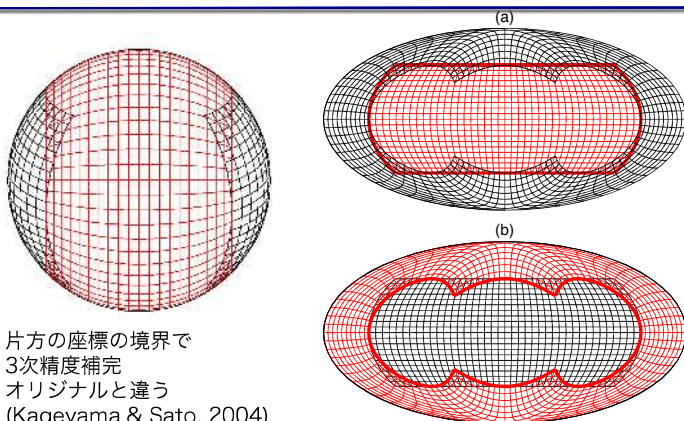


拡散領域が4-5点で分解できる。



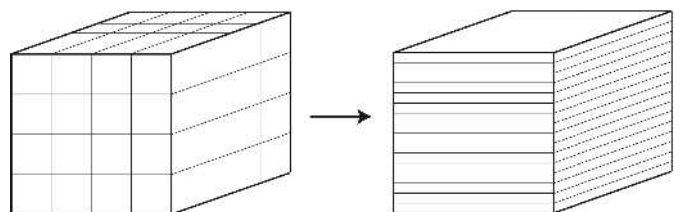
Hyperdiffusivityというのはたくさん種類がある。6次精度中央差分を用いている Staggerコードの計算と比較すると、一方の格子点が1/4程度でも同じようなスペクトルが再現できている。つまり3次元計算ならば256倍得をする。

## Yin-Yang grid



片方の座標の境界で3次精度補完  
オリジナルと違う  
(Kageyama & Sato, 2004)

## データ取り扱い

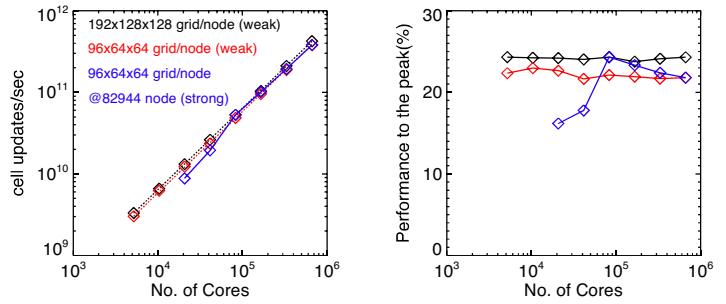


とりあえずの結果を見るために、毎出力ごとに3次元分割のデータを動径方向(重力方向)の1次元分割にリマッピング。一つの水平データを一つのファイルに出力。  
また、エネルギーフラックス、平均二乗速度などの統計量を出力とともに計算して、一つのファイルに出力。ダウンロードすべき情報を減らす。

## 並列化

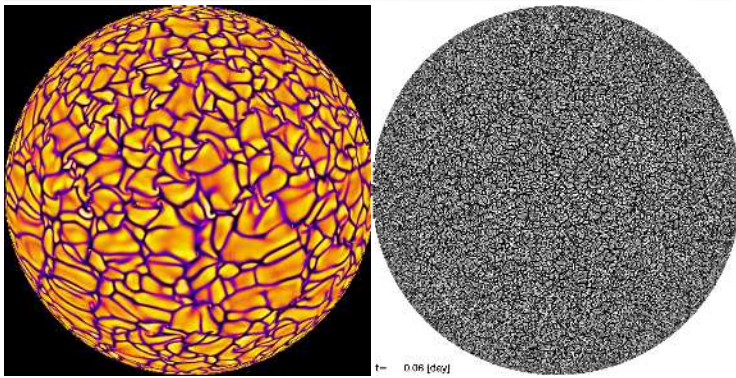
- ・三次元領域分割でのMPI
- ・京を使うときはノード内はコンパイラによる自動並列化
- ・京を使うときはFJMPIでノード配置を調べて配置(Fortranで使えない?)
- ・京でないときはPeano-Hilbert曲線で配置。

## 音速抑制法を用いたコード



ほぼ理想的なスケーリングを京全システム(663,552 core)まで示している。理論ピーク性能に対して24%の実行性能を示している。

## これまでの計算との違い



Miesch+2008

Hotta+2014

## これまででもっとも大きい計算

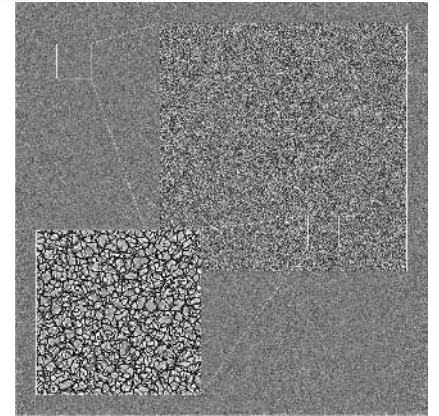
4096×32400×32352  
=4.3兆格子点

確認した限り世界でもっとも  
大きい流体力学計算

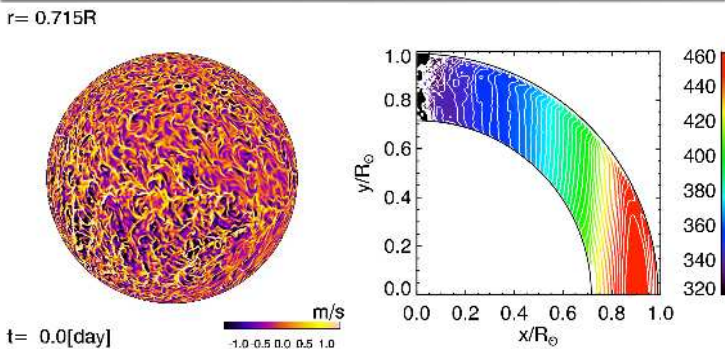
京全システムを8時間使用  
(82944node/663552core)

1.14 PBのメモリを使用  
(京は1.26 PB)

2.54 PFLOPSを達成!

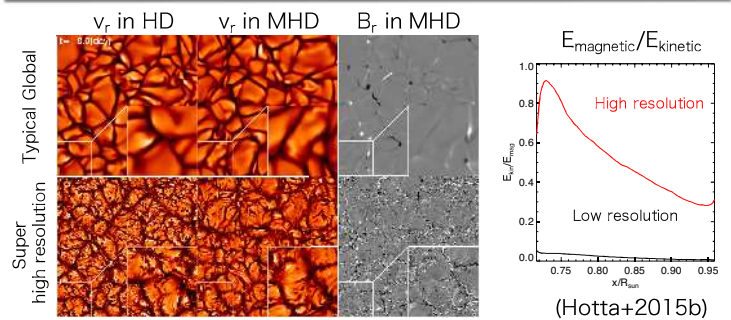


## 成果1：表面勾配層



1960年頃に発見された太陽表面付近にある角速度の勾配層を世界で初めて数値計算で実現し、その生成・維持機構を明らかにした。

## 成果2：効率的な小スケールダイナモ



これまでのダイナモ計算では低解像度ゆえに、熱対流の運動エネルギーに対して、数%の磁場エネルギーしか達成できていなかったが、領域を制限して、非常に高解像度になると、運動エネルギーに対して90%程度まで磁場が増強された。

## 今日の話の動機の復習

大きな問題は、**解像度をあげればあげるほど大規模磁場は弱くなっていき現実からずれていくこと。**

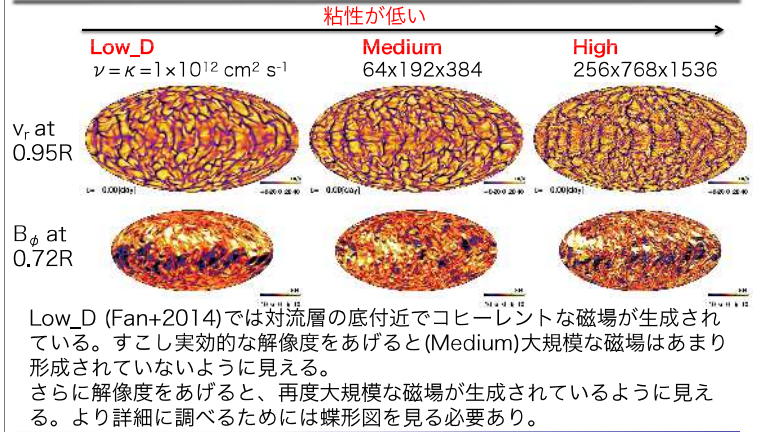
太陽ダイナモ計算の暗黙の了解は**解像度をあげすぎないこと。**

当然、これでは現実の太陽を理解できなかったことにならないので、なんとか打開策を探る。

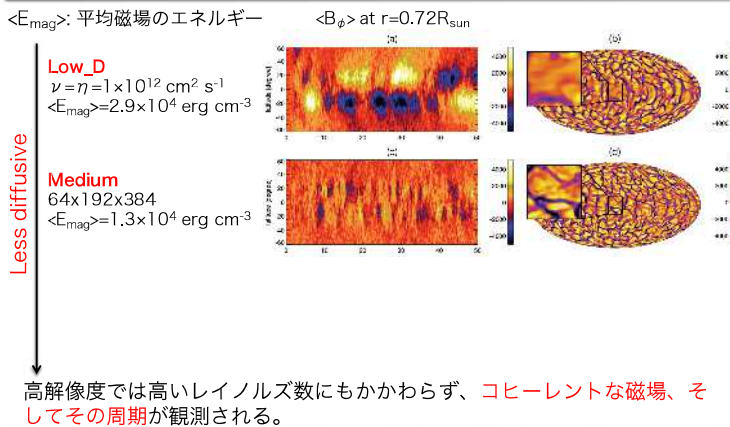
現在のところ最高解像度の計算では乱流の慣性領域はほとんど解けておらず、**小スケールのダイナモ効果が効率的ではない。**

太陽全球を扱っても、**小スケールのダイナモ効果が効率的になるような高解像度を達成することを目標とする。**

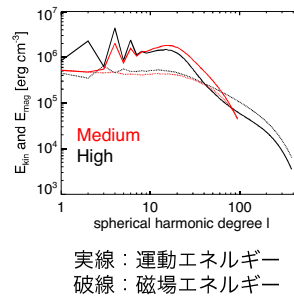
## 解像度ごとの比較



## 京で挑んだ高解像度ダイナモ計算



## なぜ大規模磁場が再度つくられるのか

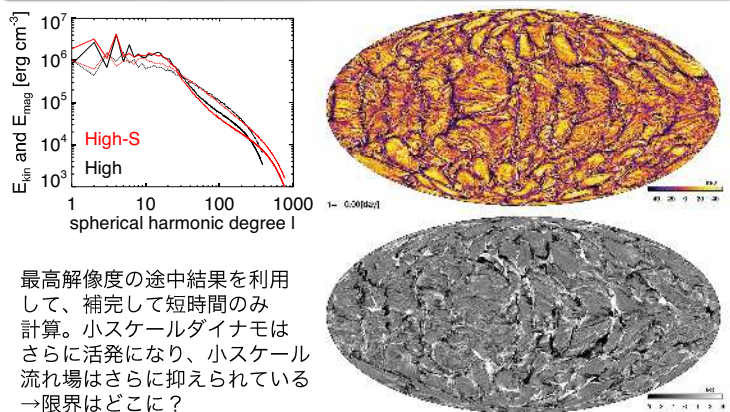


高解像度にして、小スケールダイナモが効率的になることになることによって、**小スケール磁場エネルギーが小スケール運動エネルギーを超える**ようになる。

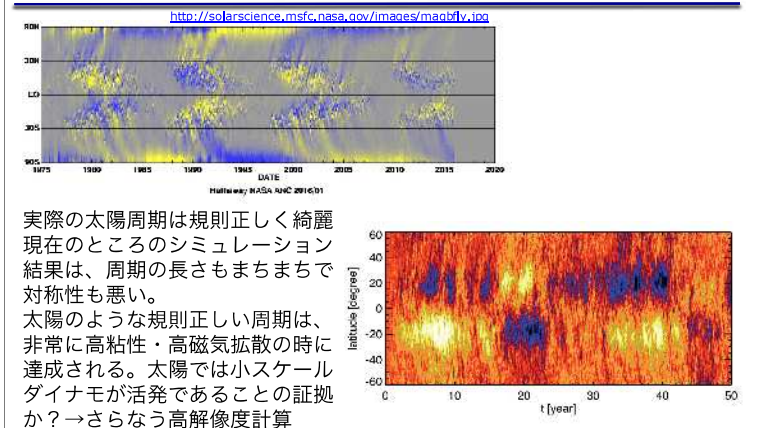
その結果、**ローレンツ力が小スケールの運動を抑制**する。

もともと小スケールの運動は大規模な磁場を壊す向きに働きがちなので、その**破壊運動を抑制**することにより、 $\alpha$ 効果・ $\Omega$ 効果がもう一度効くようになり大規模磁場が構築される。

## さらなる高解像度化



## さらなる未来への高解像度へ





## さらなる未知の領域へ

太陽で観測される磁場周期は黒点数の周期であるので、黒点を再現できないことには解決できない。

(例えば、太陽全放射の変動は11年周期で0.1%程度であり磁場エネルギーが11年周期でどう変動しているかはよくわからない)

黒点を再現するためには、太陽表面である光球まで一貫して解く必要がある。

光球の放射を取り入れる必要があるが、Abbett+2012で簡単ないい方法が提案されているので、線形近似している状態方程式をテーブルで読み込むとのコンビネーションにすることで、一貫して取り扱える。

2016年中に対流層全部200 Mm×300 Mm×300 Mmの計算を格子間隔100 km×200 km×200 kmで実行予定(したい)。  
100日分の計算に現在のコードだと100万ノード時間@Kほど必要。

## まとめ

これまでの太陽ダイナモ計算の一般的な手法であった

**アナリティック近似+スペクトル法**

を抜本的に見直し

**音速抑制法+有限差分法**

を用いた方法に変えることで、現在のところ世界最高解像度の太陽熱対流・ダイナモ計算を実行することに成功している。

その結果、これまでの謎であった表面勾配層を解決するとともに、小スケールダイナモを低く見積もっていたことを指摘した。

小スケールダイナモは大スケールダイナモを理解する上で重要であることも新たに発見した。

今後はさらなる高解像度化に挑戦するとともに、光球を目指した計算を実行予定である。